

4. Netzwerke bei veränderlicher Frequenz

Einführung

In den vorherigen Kapitel wurde erklärt, wie die „Beeinflussung eines sinusförmigen Stromflusses“ von Kondensator und Induktivitäten aussehen. Um dies zu beschreiben wurde die Impedanz eingeführt. Diese kann bei sinusförmiger Anregung als komplexwertiger Widerstand verstanden werden.

Es gilt für den Kondensator:

$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_C \quad \rightarrow \\ \underline{Z}_C &= \frac{1}{j\omega \cdot C} \end{aligned}$$

und für die Induktivität

$$\begin{aligned} \underline{U}_L &= j\omega \cdot L \cdot \underline{I}_L \quad \rightarrow \\ \underline{Z}_L &= j\omega \cdot L \end{aligned}$$

Mit komplexen Impedanzen kann ganz ähnlich umgegangen werden wie mit den ohmschen Widerständen in Elektrotechnik 1 (siehe: [einfache Gleichstromkreise](#), [lineare Quellen und Zweipole](#), [Analyse von Gleichstromnetzen](#)). Bei diesen Umformungen bleibt der Anteil $j\omega \cdot C$ erhalten. Schaltungen mit Impedanzen wie Induktivitäten und Kapazitäten werden entsprechend eine Frequenzabhängigkeit zeigen.

4.1 Frequenzabhängiger Spannungsteiler

Ziele

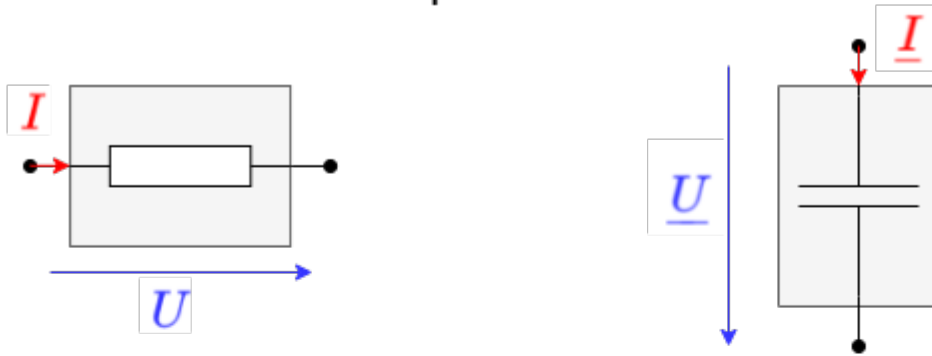
Nach dieser Lektion sollten Sie:

1. wissen, dass ..
2. wissen, dass sich ... bildet.
3. die ... können.

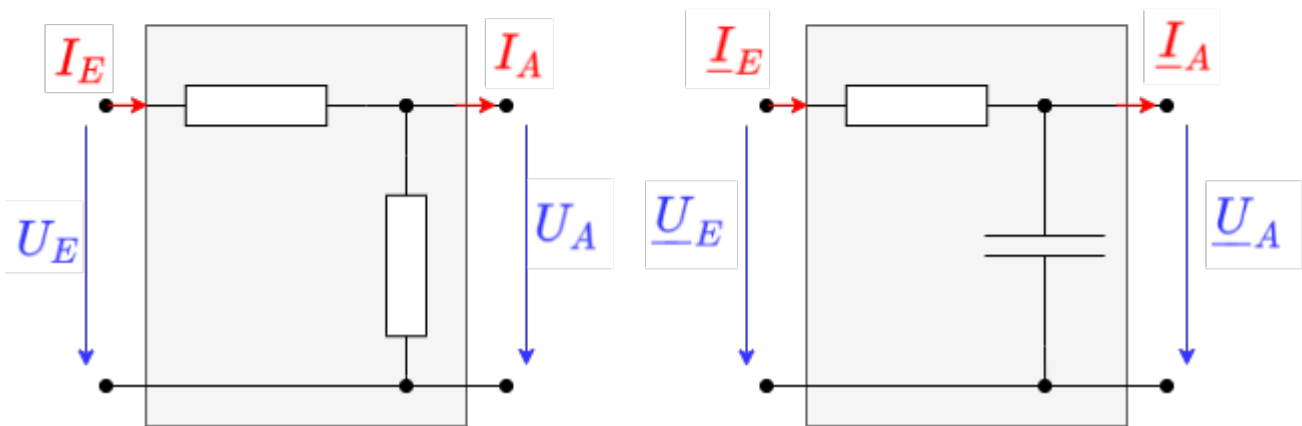
Vom Zweipol zum Vierpol

Abb. 1: Zweipol und Vierpol

Zweipole



Vierpole



Bisher wurden Komponenten wie Widerstände, Kondensatoren und Induktivitäten als Zweipol verstanden. Dies liegt auch nahe, da es nur zwei Anschlüsse gibt. Im folgenden werden aber Schaltungen betrachtet, die sich ähnlich eines Spannungsteilers verhalten: Auf einer Seite liegt eine Spannung U_E an, auf der anderen Seite bildet sich damit U_A . Es ergeben sich so 4 Klemmen. Die Schaltung kann und wird im folgenden als Vierpol betrachtet werden. Die Ein- und Ausgangsgrößen werden aber komplexwertig sein.

Bei den Vierpolen ist die Relation von „was geht rein“ (z.B. Spannung \underline{U}_E oder \underline{U}_1) zu „was geht raus“ (z.B. \underline{U}_A oder \underline{U}_2) wichtig. Damit ergibt sich aus den Ein- und Ausgangsgrößen (\underline{U}_E) und (\underline{U}_A) der Quotient:

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} \quad \& \quad \text{mit};$$

$$\underline{U}_E = U_E \cdot e^{j \varphi_{uE}} \quad \& \quad \underline{U}_A = U_A \cdot e^{j \varphi_{uA}}$$

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{U_A \cdot e^{j \varphi_{uA}}}{U_E \cdot e^{j \varphi_{uE}}} \quad \& \quad = \frac{U_A}{U_E} \cdot e^{j(\varphi_{uA} - \varphi_{uE})}$$

$$\boxed{\underline{A}} = \frac{U_A}{U_E} \cdot e^{j \Delta \varphi_u}$$

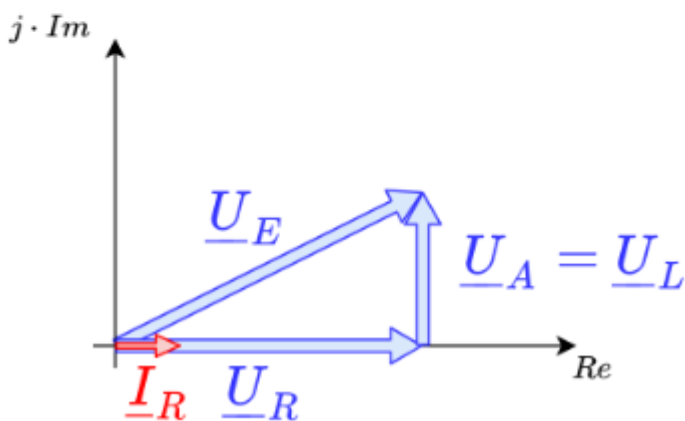
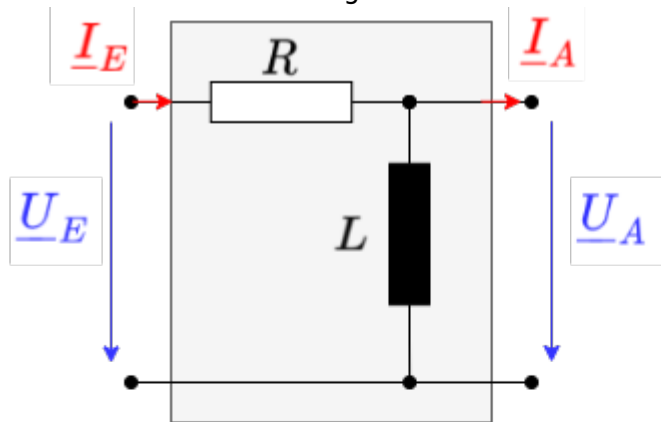
Merke:

- Der komplexwertige Quotient $\frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}$ wird **Übertragungsfunktion** genannt
- Der frequenzabhängige Betrag des Quotienten $A(\omega) = \frac{U_A}{U_E}$ wird **Amplitudengang** und die Winkeldifferenz $\Delta\varphi_u(\omega)$ **Phasengang** genannt.

Das Frequenzverhalten des Amplitudengangs und des Phasengangs ist nicht nur in Elektrotechnik und Elektronik wichtig, sondern wird auch in Regelungstechnik noch eine zentrale Rolle spielen.

RL-Reihenschaltung

Abb. 2: RL-Reihenschaltung



Es soll zunächst eine Reihenschaltung eines Widerstands R und einer Induktivität L betrachtet werden (siehe [Abbildung 2](#)). Diese Struktur wird auch RL-Glied genannt.

Hierbei ergibt sich für $\underline{U}_E = \underline{X}_E \cdot \underline{I}_E$ mit $\underline{X}_E = R + j\omega L$ und entsprechendes für \underline{U}_A :
$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}$$

Daraus ergibt sich für

- den Amplitudengang: $A = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ und

- dem Phasengang: $\Delta\varphi_u = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}$

Das Hauptaugenmerk soll zunächst auf dem Amplitudengang liegen. Dessen Frequenzverhalten lässt sich auf verschiedene Arten aus der Gleichung ableiten.

1. Grenzwertbetrachtung der RL-Anordnung (in der Gleichung und im System)
2. Plotten von Amplituden- und Frequenzgang
3. Ermitteln von markanten Frequenzen

Diese drei Punkte sollen nun durchgegangen werden.

Grenzwertbetrachtung der RL-Anordnung

Zur Grenzwertbetrachtung wird betrachtet was, passiert, wenn die Frequenz ω an die Definitionsbereichsgrenzen läuft, also $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$:

- Für $\omega \rightarrow 0$ wird $A = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \rightarrow 0$, da der Zähler gegen null geht und der Nenner größer als Null bleibt.
- Für $\omega \rightarrow \infty$ läuft $A \rightarrow 1$, denn in der Wurzel im Nenner wird $(\omega L)^2$ im Verhältnis R^2 zu immer größer. Die Wurzel strebt also gegen ωL und damit gegen den Zähler.

Es ist also zu sehen, dass:

- bei kleinen Frequenzen keine Spannung U_2 am Ausgang anliegt
- bei großen Frequenzen $A = \frac{U_A}{U_E} \rightarrow 1$ wird, also die Spannung am Ausgang der Spannung am Eingang gleicht.

Das dargestellte RL-Glied lässt also nur große Frequenzen passieren (= durchlaufen) und kleine werden weggefiltert. Die Schaltung entspricht einem **Hochpass**.

Dies lässt sich auch aus dem Verständnis der Bauteile herleiten: Bei kleinen Frequenzen ändert sich der Strom in der Spule und damit das Magnetfeld nur langsam. Es wird also nur eine vernachlässigbar kleine Gegenspannung induziert. Die Spule wirkt niederfrequent wie ein Kurzschluss. Bei höher werdenden Frequenzen ändert sich der durch U_E erzeugte Strom durch die Spule schneller, die induzierte Spannung $U_i = -di/dt$ wird groß. Die Spule hemmt dadurch den Stromfluss und es fällt eine Spannung an der Spule ab. Wird die Frequenz sehr hoch, so fließt nur ein vernachlässigbarer Strom durch die Spule - und damit auch durch den Widerstand. Der Spannungsabfall an R geht damit gegen null und die Ausgangsspannung U_A strebt gegen U_E .

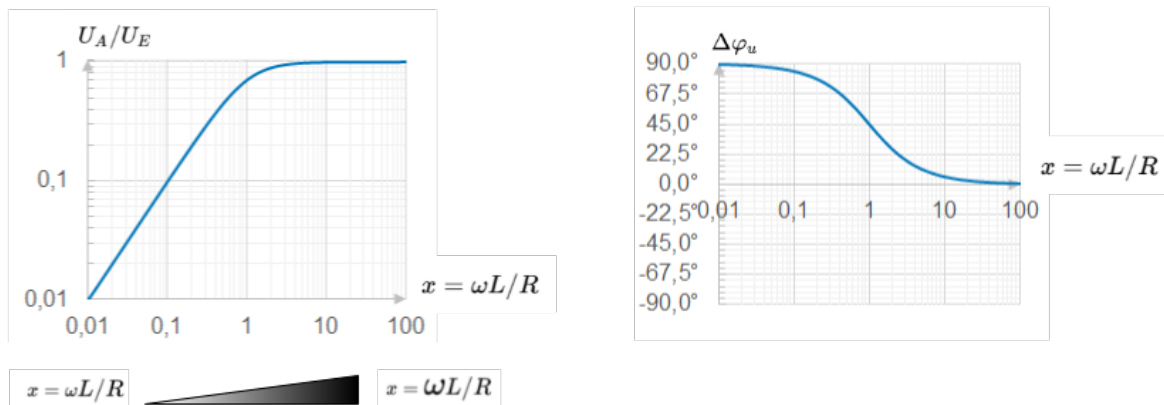
Für die weitere Betrachtung soll die Gleichung der Übertragungsfunktion $\underline{A} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}$ so umgeschrieben werden, dass sie unabhängig von Bauteilwerten wird. Damit wird eine verallgemeinerte Darstellung möglich. Diese Darstellung wird als **Normierung** bezeichnet:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)} \\ &\quad \quad \quad \rightarrow \{\text{Normierung}\} \quad \quad \quad \underline{A}_{\text{norm}} = \frac{\omega L / R}{\sqrt{1 + (\omega L / R)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)} \end{aligned}$$

Diese Gleichung verhält sich ganz gleich zu dem bisher betrachteten.

Plotten von Amplituden- und Frequenzgang

Abb. 3: Amplituden- und Phasengang des RL-Hochpass
 Amplitudengang Phasengang



Die Übertragungsfunktion lässt sich auch zerlegt in Amplitudengang und Frequenzgang darstellen. Dazu bietet es sich an

- den Amplitudengang doppeltlogarithmisch und
- den Phasengang einfach logarithmisch

aufzuzeichnen. [Abbildung 3](#) zeigt die beiden Diagramme. Auf der x-Achse wurde mit $x = \omega L / R$ die Normierungsvariable aufgetragen. Diese stellt eine gewichtete Frequenz dar.

Auch hier ist das bei der Grenzwertbetrachtung festgestellte Verhalten zu sehen: bei kleine Frequenzen ω (entspricht kleinen x) strebt der Amplitudengang gegen Null. Bei großen Frequenzen stellt sich ein Verhältnis $U_A / U_E = 1$ ein.

Interessant ist im Phasengang der Punkt $x = 1$.

- Weiter links von diesem Punkt (also bei kleineren Frequenzen) erzeugt eine Verzehnfachung der Frequenz ω eine Verzehnfachung von U_A / U_E .
- Weiter rechts von diesem Punkt (also bei größeren Frequenzen) bleibt $U_A / U_E = 1$.

Dieser Punkt markiert also eine Grenze. Weit links davon ist der ohmsche Widerstand deutlich größer der Betrag der Impedanz der Spule: $R \gg \omega L$. weit rechts ist gerade umgekehrt.

Der Punkt $x=1$ kennzeichnet gerade die Grenzfrequenz. Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{norm}} &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)} = \frac{U_A}{U_E} \cdot e^{j\varphi} \quad \text{mit} \quad \frac{U_A}{U_E} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x \\ \text{für } x \ll 1 &: \quad \frac{U_A}{U_E} \approx x \quad \text{und} \quad \varphi \approx 90^\circ \\ \text{für } x \gg 1 &: \quad \frac{U_A}{U_E} \approx 1 \quad \text{und} \quad \varphi \approx 0^\circ \\ \text{für } x = 1 &: \quad \frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \varphi = 45^\circ \end{aligned}$$

\right. \end{align*}

Merke:

- Die **Grenzfrequenz** beim Hoch- und Tiefpass ist die Frequenz, bei der der ohmsche Widerstand gerade dem Betrag der Impedanz gleicht.
- Die Grenzfrequenz trennt einen Bereich in dem der Filter Signale durchlässt von einem in dem diese unterdrückt (=gesperrt) werden.
- Bei der Grenzfrequenz wird die Phase $\varphi = 45^\circ$ und die Amplitude $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

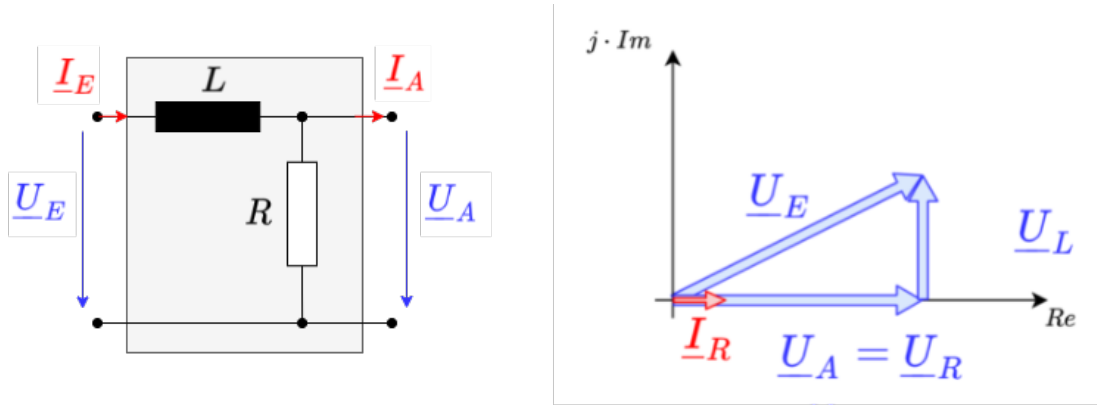
Diese Aussagen gelten für einstufige, passive Filter, d.h. einem RL- oder einem RC-Glied. Mehrstufige Filter werden in der Schaltungstechnik betrachtet.

Die Grenzfrequenz in diesem Fall ergibt sich zu:

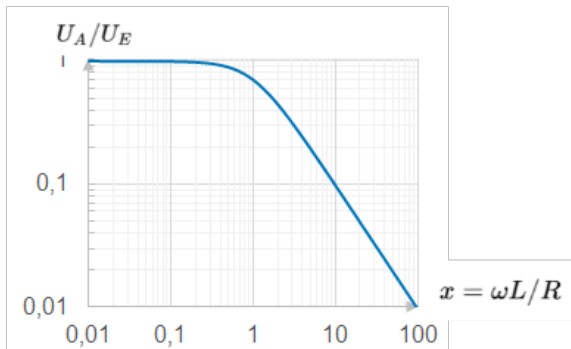
$$\begin{aligned} R &= \omega L \quad \omega_{Gr} = \frac{R}{L} \quad 2\pi f_{Gr} = \frac{R}{L} \quad \rightarrow \quad \boxed{f_{Gr} = \frac{R}{2\pi \cdot L}} \end{aligned}$$

RL-Tiefpass

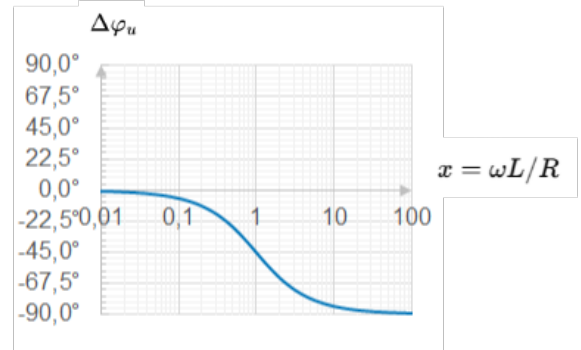
Abb. 4: Schaltung, Zeigerdiagramm sowie Amplituden- und Phasengang des RL-Tiefpass



Amplitudengang



Phasengang



Bisher wurde nur eine Variante des RL-Glieds betrachtet, nämlich jenes, bei welchem die Ausgangsspannung \underline{U}_A an der Induktivität abgegriffen wird. Hier soll kurz darauf eingegangen werden, was passiert, wenn die beiden Komponenten vertauscht werden.

In diesem Falle ergibt sich als normierte Übertragungsfunktion:

$$\underline{A}_{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L / R)^2}} \cdot e^{-j \arctan \left\{ \frac{\omega L}{R} \right\}}$$

Die Grenzfrequenz ist wieder über $f_{Gr} = \frac{R}{2 \pi \cdot L}$ gegeben.

RC-Reihenschaltung

4.2 Resonanzerscheinungen

Ziele

Nach dieser Lektion sollten Sie:

1. wissen, dass zwischen Magnetpolen Kräfte wirken und die Richtung der Kräfte kennen.
2. wissen, dass sich um einen stromdurchflossenen Leiter ein magnetisches Feld bildet.
3. die Feldlinien des magnetischen Feldes skizzieren können. Dabei wissen Sie welche

Richtung das Feld hat und wo das Feld am dichtesten ist.

Effekte um Permanentmagneten

[Falstad Filter Simulation](#)

Entkoppelkondensator am Mikrocontroller

[Simulation in Falstad](#)

Hinweis: Die Simulation gibt ein stark vereinfachtes Bild wieder. Die Reaktion des Mikrocontroller ist auf ein Dreiecksignal reduziert dargestellt, da die Flankensteilheit der Spannungen nicht abgebildet werden können. Eine reale Simulation erfordert ein leistungsfähiges SPICE-Programm, in welchem die [Leitungstheorie](#) abgebildet werden kann.

Weitere Details sind sind [hier \(Praxis\)](#) oder [hier \(Platinen-Layout\)](#) zu finden.

From:
<https://wiki.mexle.org/> - MEXLE Wiki

Permanent link:
https://wiki.mexle.org/elektrotechnik_2/netzwerke_bei_veraenderlicher_frequenz?rev=1623710890

Last update: 2021/06/15 00:48

